8. (a) On commence par remarquer que $\chi_A = T^2 - \mathrm{Tr}(A)T + \det(A) = T^2 - T - 2 = (T+1)(T-2)$. Soit $n \geq 2$ (les cas $n = 0, 1$ sont triviaux) ; par division euclidienne (et comme $deg(\chi_A) = 2$) il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ et deux uniques réels a_n, b_n tels que :

$$T^n = Q_n(T)\chi_A(T) + a_nT + b_n \qquad (\mathcal{E}_1)$$

En évaluant cette égalité en $T = -1$ et $T = 2$ on trouve le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -a_n + b_n & = & (-1)^n \\ 2a_n + b_n & = & 2^n \end{cases}$$

On résout et on trouve $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = \dfrac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}$, $b_0 = 1$, $b_1 = 0$ et $b_n = a_n + (-1)^n = \dfrac{2^n + (-2)^n}{3}$.

(b) En utilisant le théorème de Cayley–Hamilton et la relation $(\mathcal{E}_1)$ on trouve :

$$A^n = Q_n(A)\underbrace{\chi_A(A)}_{=0} + a_nA + b_n = a_nA + b_n$$

Et donc les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ construites précédemment conviennent.

✌ ***Remarque :*** Ce procédé permet de calculer facilement les puissances de A. Par exemple :

$$A^{897} = a_{897}A + b_{897} = \frac{2^{897}+1}{3}A$$

15. On commence par remarquer que :

$$\chi_A = X^2(X-1)(X+1)$$

Les multiplicités des valeurs propres dans χ_A nous donnent la taille des blocs diagonaux correspondants dans la forme réduite de A. Ici on devra donc avoir un bloc 2×2 correspondant à 0 et deux blocs 1×1 correspondant à 1 et -1. La forme réduite de A sera donc nécessairement du type suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les coefficients marqués * peuvent être remplis à la discrétion du lecteur : ils n'ont ici aucune importance. Le coefficient ε (ou plutôt sa nullité) dépends de (et caractérise) la dimension de $E_0(A) = \ker(A)$. En résolvant le système linéaire ad hoc on trouve que $\dim(E_0(A)) = 1$ et donc on *doit* avoir $\varepsilon \neq 0$. *In fine*, les deux formes suivantes conviennent :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

✍ ***Remarque :*** Pour "intuiter" la forme réduite d'une matrice, il faut garder en tête 3 principes :
– la taille des blocs est donnée par les multiplicités dans le polynôme caractéristique ;
– la dimension des sous–espaces propres donne le nombre de colonnes sans "coefficient parasite" (traditionnellement –forme de Jordan– un 1 sur la surdiagonale) ;
– les coefficients situés au–dessus des blocs "ne comptent pas".