12. (a) On a :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

et donc la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

convient.

(b) Après calcul on trouve :

$$\chi_A = (X+1)(X-1)^3.$$

La matrice

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 donc la matrice A est semblable à la matrice triangulaire suivante :

$$J := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut calculer une matrice de passage P par la méthode usuelle, en résolvant les quatre équations suivantes :

$$\begin{cases} Ae_1 = -e_1 \\ Ae_2 = e_2 \\ Ae_3 = e_3 \\ Ae_4 = e_3 + e_4 \end{cases}.$$

Il reste à présent à calculer l'exponentielle de la matrice $tJ = P^{-1}tAP$ pour $t \in \mathbb{R}$; on écrit tout d'abord :

$$J = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$

puis, comme les matrices D et N commutent ($ND = DN = N$) :

$$J^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D^{n-k} N^k.$$

On remarque ensuite que $N^2 = 0$; ainsi

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R},\ (tJ)^n &= t^n \sum_{k=0}^{2} C_n^k D^{n-k} N^k \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n t^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & nt^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où :

$$e^{tJ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tJ)^n}{n!} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

En effet :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^n}{n!} = t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = te^t.$$

Les solutions de notre système différentiel sont donc les :

$$X : t \mapsto e^{tA} X_0 = P e^{tJ} P^{-1} X_0$$

pour X_0 parcourant $\mathbb{R}^4$. Notons que comme P^{-1} est bijective, ceci est équivalent à considérer les

$$X : t \mapsto e^{tA} X_0 = P e^{tJ} U_0$$

pour U_0 parcourant $\mathbb{R}^4$, ce qui est plus simple à calculer (pas besoin d'inverser P).