FEUILLE D'EXERCICES 7

Dans toute cette feuille, on fixe un anneau commutatif unitaire $\mathbb{A}$.

A) Anneaux factoriels, bis

1. Calculer le pgcd (resp. le ppcm) de $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ et $X^3 - 1$ dans $\mathbb{Z}[X]$.
2. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] := \{a + i\sqrt{5}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ n'est pas factoriel.
3. Vrai ou faux ?
   (a) Si $\mathbb{A}$ est factoriel alors tout couple d'éléments de $\mathbb{A}$ admet un pgcd (resp. un ppcm).
   (b) Tout anneau factoriel est principal.
   (c) Tout corps est un anneau factoriel.
   (d) Tout quotient intègre d'un anneau factoriel est factoriel.
   (e) Tout sous–anneau d'un anneau factoriel est factoriel.
4. Calculer le pgcd (resp. le ppcm) de $X^2Y + XY^2 - X - Y$ et $X^2Y - X$ dans $\mathbb{Z}[X, Y]$.
5. On suppose $\mathbb{A}$ intègre ; montrer que tout élément *premier* $p \in \mathbb{A}$ (i.e tel que l'idéal (p) soit premier) est irréductible.

B) Anneaux principaux, anneaux euclidiens

1. On suppose $\mathbb{A}$ principal et on se donne $a, b \in \mathbb{A}$. Que dire des idéaux $(a) + (b)$ et $(a) \cap (b)$?
2. Montrer que tout anneau euclidien est principal.
3. Soit $\mathbb{A}$ un anneau principal. Montrer que tout idéal premier de $\mathbb{A}$ est maximal.
4. Vrai ou faux ?
   (a) Si $\mathbb{A}$ est principal alors $\mathbb{A}[X]$ est principal.
   (b) Tout quotient intègre d'un anneau principal est principal.
   (c) Tout sous–anneau d'un anneau principal est principal.
5. On suppose $\mathbb{A}$ euclidien ; montrer que tout élément de stathme nul est inversible.
6. On suppose $\mathbb{A}$ intègre. L'idéal $(X+Y)$ est–il premier dans $\mathbb{A}[X, Y]$? Maximal ?
7. Les idéaux suivants sont–ils premiers (resp. maximaux) dans $\mathbb{Z}[X, Y]$: $(2X)$, (X, Y), $(X, Y, 2)$?

arnaud.girand@ens-rennes.fr