Feuille d'exercices 6

A) Localisation

On fixe un anneau commutatif unitaire $\mathbb{A}$ et une partie multiplicative $S \subset \mathbb{A}$.

1. Montrer que si $\mathbb{A}$ est intègre et $0 \notin S$ alors $\mathbb{A}[S^{-1}]$ est intègre.
2. Montrer que si $\mathbb{A}$ est principal ($i.e$ si tout idéal de $\mathbb{A}$ est de la forme (a) pour un certain $a \in \mathbb{A}$) alors $\mathbb{A}[S^{-1}]$ l'est également.
3. Soit $s \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ et soit $S := \{s^n \mid n \geq 0\}$.
   (a) Montrer que $\mathbb{A}[S^{-1}]$ est isomorphe à $\mathbb{A}[X]/(sX - 1)$.
   (b) En déduire que si k est un corps alors l'anneau quotient $k[X,Y]/(XY-1)$ est principal.
4. (a) Soit I un idéal de $\mathbb{A}$; montrer que $\sqrt{I[S^{-1}]} = \sqrt{I}[S^{-1}]$.
   (b) Que peut–on en déduire concernant $\mathrm{Nil}(\mathbb{A}[S^{-1}])$?
5. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathbb{A}$.
   (a) Montrer que $S := \mathbb{A} \setminus \mathfrak{p}$ est une partie multiplicative de $\mathbb{A}$.
   (b) Déterminer les idéaux maximaux de $\mathbb{A}_{\mathfrak{p}} := \mathbb{A}[S^{-1}]$.

B) Anneaux factoriels

1. Pour $\mathbb{A} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ et $1 \leq n \leq 4$ décomposer $X^n - 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{A}[X]$. Même question pour $X^n - 2$.
2. Soit k un corps ; montrer qu'il existe une infinité de polynômes irréductibles dans $k[X]$.
3. On se place dans l'anneau $\mathbb{Z}[i] := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes, pour $p \in \mathbb{N}$ premier :
   (i) p est non irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$;
   (ii) $p = z\bar{z}$ avec $z \in \mathbb{Z}[i]$ irréductible ;
   (iii) il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $p = m^2 + n^2$.
4. Soit k un corps et soit $f \in k[Y]$ un polynôme irréductible. Montrer que f est irréductible dans $k[X,Y]$.