FEUILLE D'EXERCICES 4

A) Anneaux de polynômes

Dans tout ce paragraphe, $\mathbb{A}$ désigne un anneau commutatif unitaire. On identifiera $\mathbb{A}$ à son image par l'injection naturelle $\mathbb{A} \hookrightarrow \mathbb{A}[X]$.

1. Soit J un idéal de $\mathbb{A}[X]$; justifier que $J \cap \mathbb{A}$ est un idéal de $\mathbb{A}$.
2. Soit I un idéal de $\mathbb{A}$; on pose :

$$I[X] := \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \mid d \geq 0,\ (a_i)_i \in I^{d+1} \right\}.$$

   (a) Montrer que $I[X]$ est l'idéal engendré par I dans $\mathbb{A}[X]$.

   (b) Montrer que le morphisme canonique $\mathbb{A}[X]/I[X] \to (\mathbb{A}/I)[X]$ est un isomorphisme.

   (c) Tous les idéaux de $\mathbb{A}[X]$ sont–ils de la forme $I[X]$?
3. Soit $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que l'ensemble suivant est un idéal maximal de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$:

$$I := \{P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] \mid P(\underline{x}) = 0\}.$$

   Que dire si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?
4. Soit k un corps et soit $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ un idéal. Montrer que le morphisme naturel $k \to k[X_1, \ldots, X_n]/I$ munit $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ d'une structure de k–e.v..
5. Soit k un corps et soit $P \in k[X]$ un polynôme irréductible ; montrer que le quotient $k[X]/(P)$ est un corps. Quelle est sa dimension en tant que k–e.v. ?
6. Soit k un corps et soit $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ un idéal propre. Montrer que s'il existe $i \in [n]$ tel que $I \cap k[X_i] = \{0\}$ alors le quotient $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ est de dimension infinie comme k–e.v..

B) Séries formelles

Soit $\mathbb{A}$ un anneau commutatif unitaire ; on appelle *anneau des séries formelles* sur $\mathbb{A}$, noté $\mathbb{A}[[X]]$, l'ensemble $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ muni de l'addition terme à terme et de la multiplication "par produit de Cauchy" :

$$(a_n)_n \times (b_n)_n := \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right)_n.$$

On remarque que si on pose, pour $i \geq 0$, $X^i := (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0)$ on peut associer de façon unique à tout élément de $\mathbb{A}[[X]]$ une "écriture en série" de la façon suivante :

$$(a_n)_n \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n.$$

Notons bien qu'il s'agit là d'une notation : il n'est pas question ici de faire converger quoi que ce soit !

1. Justifier que $X^i = \underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{i \text{ fois}}$. L'anneau $\mathbb{A}[[X]]$ est–il unitaire ?

2. On appelle *valuation* d'une série formelle $s = \sum a_n X^n$ l'élément

$$\nu(s) := \min\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \,.$$

   (a) Montrer que si $\mathbb{A}$ est un anneau intègre alors pour toutes séries formelles s, s' on a $\nu(s \times s') = \nu(s) + \nu(s')$.

   (b) En déduire que si $\mathbb{A}$ est intègre alors $\mathbb{A}[[X]]$ l'est également.

3. (a) Montrer que les inversibles de l'anneau $\mathbb{A}[[X]]$ sont exactement les éléments $s = \sum a_n X^n$ tels que $a_0 \in \mathbb{A}^\times$. Donner le cas échéant un algorithme permettant de calculer les coefficients de l'inverse.

   (b) Quel est l'inverse de l'élément $1 - X$?

4. Soit k un corps ; déterminer les idéaux de $k[[X]]$. Est-ce un anneau local ?