FEUILLE D'EXERCICES 3

A) Généralités sur les corps

1. (a) Montrer que
$$\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \,\middle|\, u, v \in \mathbb{C} \right\}$$
est un anneau à division.
   (b) Montrer qu'il existe un morphisme d'anneaux injectif $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{H}$.
   (c) $\mathbb{H}$ est–il un corps ?
2. Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.
3. Montrer que tout anneau intègre ne possédant qu'un nombre fini d'idéaux est un corps.
4. Soit α une racine complexe du polynôme $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.
   (a) Justifier que ce polynôme est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
   (b) Montrer que l'application suivante est un morphisme d'anneaux :
$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_\alpha : \mathbb{Q}[X] &\to \mathbb{C} \\ P &\mapsto P(\alpha). \end{aligned}$$
   (c) On pose :
$$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] := \{a + b\alpha + c\alpha^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}.$$
Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ est un corps.

B) Caractéristique

1. Montrer que la caractéristique d'un anneau intègre est soit nulle, soit un nombre premier.
2. Soit k un corps de caractéristique $p > 0$. Montrer que l'application suivante est un morphisme de corps :
$$\begin{aligned} F : k &\to k \\ x &\mapsto x^p. \end{aligned}$$
Quel est son noyau ?
3. Vrai ou faux ?
   (a) Un corps de caractéristique non nulle est nécessairement fini.
   (b) Tout anneau commutatif de caractéristique nulle est intègre.
   (c) Si k est un corps de caractéristique p, alors pour tout $a \in k^*$ on a $a^p = 1$.
   (d) Un morphisme de corps est toujours injectif.

arnaud.girand@ens-rennes.fr