FEUILLE D'EXERCICES 2

A) Éléments remarquables bis

1. Soit $\mathbb{A}$ un anneau commutatif unitaire.
   (a) Montrer que $\mathrm{Nil}(\mathbb{A}[X]) = \mathrm{Nil}(\mathbb{A})[X]$, où 'Nil' désigne l'ensemble des éléments nilpotents d'un anneau donné.
   (b) Calculer $\mathbb{A}[X]^\times$.
   (c) Montrer que $P \in \mathbb{A}[X]$ est un diviseur de zéro si et seulement si il existe $a \in \mathbb{A}$ non nul tel que $aP = 0$.
2. Soit $\mathbb{A}$ l'anneau $\mathrm{End}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}))$ des endomorphismes d'espaces vectoriels de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On définit deux éléments $a, b \in \mathbb{A}$ comme suit, pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$a(f) := f' \qquad \text{et} \qquad b(f) : x \mapsto \int_0^x f(t)dt.$$

   Montrer que ab est inversible. Qu'en déduire sur ba ?

B) Idéaux

1. Soit $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que l'ensemble suivant est un idéal de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$:

$$\mathcal{I} := \{P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \mid P(\underline{x}) = 0\}.$$

   Est–il premier ? Maximal ?
2. Caractériser les idéaux des anneaux $\mathbb{Z}$ et $k[X]$ (avec k un corps quelconque).
3. Soit $\mathbb{A}$ un anneau commutatif.
   (a) Montrer que $\mathrm{Nil}(\mathbb{A})$ est un idéal de $\mathbb{A}$.
   (b) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathbb{A}$; montrer que $\mathrm{Nil}(\mathbb{A}) \subset \mathfrak{p}$.
   (c) Montrer que :

$$\mathrm{Nil}(\mathbb{A}) = \bigcap_{\mathfrak{p} \text{ premier}} \mathfrak{p}.$$

4. Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux anneaux, I un idéal premier de $\mathbb{A}$ et $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$. Que dire de $f^{-1}(I)$? Et si I est maximal ?
5. Soit $\mathbb{A}$ un anneau commutatif. Montrer que si tout idéal de $\mathbb{A}$ distinct de l'anneau tout entier est premier alors $\mathbb{A}$ est un corps.
6. Soit $\mathbb{A}$ un anneau commutatif et soient I, J deux idéaux de $\mathbb{A}$. Quelle(s) relation(s) a–t–on entre $I \cdot J$ et $I \cap J$?
7. Soit $\mathbb{A}$ un anneau commutatif et soit I un idéal non premier de $\mathbb{A}$. Montrer qu'il existe deux idéaux I_1, I_2 de $\mathbb{A}$ distincts de I tels que $I_1 \cdot I_2 \subset I \subset I_1 \cap I_2$.
8. Un anneau commutatif unitaire $\mathbb{A}$ est dit *local* s'il admet un unique idéal maximal.
   (a) Les anneaux suivants sont–ils locaux : l'anneau nul, un corps, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
   (b) Montrer que $\mathbb{A}$ est local si et seulement si $\mathbb{A} \setminus \mathbb{A}^\times$ est un idéal.

C) Topologie de Zariski

On fixe dans ce paragraphe un anneau commutatif unitaire $\mathbb{A}$ et on note $\mathrm{Spec}(\mathbb{A})$ l'ensemble de ses idéaux premiers.

1. Déterminer $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ et $\mathrm{Spec}(k[X])$ (pour un corps k quelconque).
2. On pose, pour I un idéal de $\mathbb{A}$:
$$\mathcal{V}(I) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathbb{A}) \,|\, I \subset \mathfrak{p}\}.$$
Montrer que les $\mathcal{V}(I)$ sont les fermés d'une topologie sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{A})$, appelée *topologie de Zariski*.
3. Pour $S \subset \mathrm{Spec}(\mathbb{A})$ on pose :
$$\mathcal{I}(S) := \{f \in \mathbb{A} \,|\, \forall \mathfrak{p} \in S,\ f \in \mathfrak{p}\}.$$
   (a) Calculer l'action de $\mathcal{I}$ sur les réunions de sous–ensembles de $\mathrm{Spec}(\mathbb{A})$.
   (b) Montrer que, si I est un idéal de $\mathbb{A}$:
$$\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}.$$
   (c) Calculer l'adhérence d'un sous–ensemble $S \subset \mathrm{Spec}(\mathbb{A})$. Que dire du cas d'un 'point' $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathbb{A})$?
   (d) Un espace topologique est dit *irréductible* s'il ne peut s'écrire comme réunion de deux fermés distincts non triviaux. On suppose que $\sqrt{(0)} = (0)$; montrer alors que $\mathrm{Spec}(\mathbb{A})$ est irréductible si et seulement si $\mathbb{A}$ est intègre.
4. Soit $a \in \mathbb{A}$ tel que $a^2 = a$ (on dit que a est *idempotent*). Montrer que $\mathcal{V}(a)$ est à la fois ouvert et fermé pour la topologie de Zariski.