FEUILLE D'EXERCICES 1

A) Généralités sur les anneaux

1. Déterminer tous les anneaux unitaires à 2, 3 et 4 éléments.
2. On considère l'ensemble suivant :
$$\mathbb{D} := \left\{ \frac{m}{10^n} \,|\, (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}.$$
   (a) Montrer que $\mathbb{D}$ est un sous–anneau de $\mathbb{Q}$.
   (b) Déterminer le groupe $\mathbb{D}^\times$ des inversibles de $\mathbb{D}$.
   (c) $\mathbb{D}$ contient–il des diviseurs de zéro ?
3. (a) Montrer que l'ensemble suivant est un anneau unitaire :
$$\mathbb{Z}[i] := \{x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{Z}\}.$$
   (b) $\mathbb{Z}[i]$ est–il isomorphe à l'anneau produit $\mathbb{Z}^2$?
   (c) Déterminer le groupe $\mathbb{Z}[i]^\times$.
4. Soit $\mathbb{A}$ un anneau tel que $\forall a \in \mathbb{A}$, $a^2 = a$. Montrer que $\mathbb{A}$ est commutatif.
5. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est un anneau commutatif unitaire pour $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Déterminer ses diviseurs de zéro.
6. Faire de même pour l'ensemble $\mathcal{A}(1)$ des fonctions développables en série entière sur $[-1, 1]$.
7. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$; on considère l'espace $\mathcal{L}^1(a, b)$ des fonctions intégrables sur (a, b).
   (a) $(\mathcal{L}^1(0, 1), +, \times)$ est–il un anneau ?
   (b) Pour $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on pose :
$$f \star g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy$$
   Que peut–on dire de $(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}), +, \star)$?

B) Morphismes

1. On considère l'ensemble suivant :
$$\mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$
   Montrer que $\mathcal{C}$ est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$.
2. Soit $\mathbb{A}$ un anneau ; on définit l'*anneau miroir* $\mathbb{A}^\circ$ comme l'anneau $\mathbb{A}$ muni de la multiplication "inversée" $(x, y) \mapsto y \times x$.
   (a) Montrer que $\mathbb{A}^\circ$ est bien un anneau. Que dire si $\mathbb{A}$ est commutatif ?
   (b) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^\circ$.
3. Soient $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ et $g : \mathbb{A} \to \mathbb{B}'$ deux morphismes d'anneaux tels que g soit surjectif. Montrer qu'alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) $\ker(g) \subset \ker(f)$;
   (ii) il existe un unique morphisme $\varphi : \mathbb{B}' \to \mathbb{B}$ tel que $f = \varphi \circ g$.
4. (a) Montrer que l'ensemble suivant est un corps :
$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{x + \sqrt{2}y \,|\, x, y \in \mathbb{Q}\}.$$
   (b) Calculer le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}[\sqrt{2}])$.

C) Arithmétique sur les entiers.

1. Pour $n \geq 1$ déterminer le pgcd des coefficients du binôme C_{2n}^{2i+1}, pour i variant de 0 à $n-1$.
2. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de 3^{2014}.
3. *Théorème des restes chinois.* Soient $m, n \geq 2$ deux entiers premiers entre eux. Décrire un isomorphisme entre les anneaux $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.
4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$; montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est intègre ;
   (ii) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps ;
   (iii) p est premier.
5. *Théorème de Wilson.* Soit $p \geq 2$; montrer que :

$$p \text{ est premier} \quad \Longleftrightarrow \quad (p-1)! \equiv -1[p].$$

D) Éléments remarquables

1. Exhiber un élément nilpotent non nul et un diviseur de zéro non nilpotent de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Caractériser les éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
3. Soit $\mathbb{A}$ un anneau (unitaire) et soit $x \in \mathbb{A}$ un nilpotent. Montrer que $1-x \in \mathbb{A}^\times$.
4. Soit $\mathbb{A}$ un anneau et soient $a, b \in \mathbb{A}$ tels que $1 - ab \in \mathbb{A}^\times$. Montrer qu'alors $1 - ba \in \mathbb{A}^\times$.