**Anneaux et arithmétique**

CONTRÔLE CONTINU 2
*Éléments de correction.*

## Exercice 1

1. Il est de degré 3 et sans racines sur $\mathbb{Q}$.
2. Fait en TD.
3. Par théorème d'isomorphisme, $\mathrm{Im}(\mathrm{ev}_\alpha)$ est isomorphe à $\mathbb{Q}[X]/(X^3-3)$ donc c'est bien un corps car l'idéal $(X^3-3)$ est maximal d'après 1.; pour finir $\alpha = \mathrm{ev}_\alpha(X)$ est une racine cubique de 3 dans ce corps.
4. Par division euclidienne on remarque que $(1, \alpha, \alpha^2)$ est génératrice. On peut alors conclure à la main ou par un argument de dimension (cf. TD).

## Exercice 2

1. Fait en TD.
2. La propriété est fausse sur $\mathbb{R}$ : prendre par exemple $I := (X^2+1)$. Elle est par contre vraie sur $\mathbb{C}$ : comme $\mathbb{C}[X]$ est principal et que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos tous les idéaux maximaux de $\mathbb{C}[X]$ sont de la forme $(X-x)$ avec $x \in \mathbb{C}$.

## Exercice 3

1. $P$ est de degré 2 et sans racine sur $k$ donc il est irréductible. De fait $\mathcal{Q}$ est un corps; on vérifie ensuite qu'il est de caractéristique 3 (son sous–corps premier est $k$).
2. La vérification de la liberté a été traitée en TD et il suffit ensuite de dire que $\dim_k \mathcal{Q} = 2$. Le cardinal de $\mathcal{Q}$ est alors $3^2 = 9$.

## Exercice 4

1. Faux : considérer $\mathbb{F}_2(X)$.
2. Vrai : raisonner avec les quotients (corps implique intègre).
3. Faux : considérer $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (anneau produit).
4. Vrai : cf TD.
5. Faux : $\mathbb{F}_4^*$ contient un élément d'ordre 3 (cf. TD).
6. Vrai : fait en TD.


arnaud.girand@ens-rennes.fr