Anneaux et arithmétique

Contrôle continu 2

Durée : 1h.

Aucun document autorisé. Les différents exercices sont indépendants et peuvent donc être abordés dans tout ordre jugé pertinent. **Ce sujet comporte deux pages.**

Exercice 1

Soit α une racine complexe du polynôme $X^3 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$.

1. Justifier que ce polynôme est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
2. Montrer que l'application suivante est un morphisme d'anneaux unitaires :

$$\begin{aligned}\mathrm{ev}_\alpha : \mathbb{Q}[X] &\to \mathbb{C}\\ P &\mapsto P(\alpha).\end{aligned}$$

3. Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{ev}_\alpha)$ est un corps dans lequel le polynôme $X^3 - 3$ admet au moins une racine.
4. Donner (en justifiant) une base de $\mathrm{Im}(\mathrm{ev}_\alpha)$ en tant que $\mathbb{Q}$–e.v..

Exercice 2

1. Soit $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que l'ensemble suivant est un idéal maximal de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$:

$$I(\underline{x}) := \{P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \mid P(\underline{x}) = 0\}.$$

   Que dire si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?
2. Tous les idéaux maximaux de $\mathbb{R}[X]$ sont–ils de la forme $I(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$? Que dire si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$?

Exercice 3

On pose $k := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $P := X^2 + 1 \in k[X]$.

1. Montrer que $\mathcal{Q} := k[X]/(P)$ est un corps. Quelle est sa caractéristique ?
2. On note α la classe de X dans $\mathcal{Q}$; montrer que $(1, \alpha)$ forme une base du k–e.v $\mathcal{Q}$. En déduire le cardinal de $\mathcal{Q}$.

arnaud.girand@ens-rennes.fr

Exercice 4

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et proposer une preuve ou un contre–exemple le cas échéant.

1. Un corps de caractéristique non nulle est nécessairement fini.
2. Tout idéal maximal est premier.
3. Tout anneau commutatif de caractéristique nulle est intègre.
4. Un morphisme de corps est toujours injectif.
5. Si k est un corps de caractéristique p, alors pour tout $a \in k^*$ on a $a^p = a$.
6. Tout anneau intègre fini est un corps.

arnaud.girand@ens-rennes.fr