Anneaux et arithmétique

CONTRÔLE CONTINU 1

Durée : 1h.

Aucun document autorisé. Les différents exercices sont indépendants et peuvent donc être abordés dans tout ordre jugé pertinent. **Ce sujet comporte deux pages.**

Exercice 1

1. Soit $\mathbb{A}$ un anneau unitaire et soit $a \in \mathbb{A}$. Montrer que si a admet un inverse (multiplicatif) à gauche et un inverse à droite alors ils sont égaux.
2. Soit $\mathbb{A}$ l'ensemble $\operatorname{End}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}))$ des endomorphismes d'espaces vectoriels de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $(\mathbb{A}, +, \circ)$ est un anneau unitaire et justifier que la formule suivante définit bien un élément de $\mathbb{A}$ (pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$) :
   $$a(f) := f'.$$
   (b) L'élément a ainsi défini est–il inversible à gauche (respectivement à droite) ? Le cas échéant, a–t–on unicité de l'inverse ?

Exercice 2

1. Montrer que l'ensemble suivant est un anneau commutatif unitaire :
   $$\mathbb{Z}[i\sqrt{17}] := \{x + i\sqrt{17}y \,|\, x, y \in \mathbb{Z}\}.$$
2. $\mathbb{Z}[i\sqrt{17}]$ est–il isomorphe à l'anneau produit $\mathbb{Z}^2$?
3. Déterminer le groupe $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}[i\sqrt{17}])$ des automorphismes de l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{17}]$.
4. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{17}]^\times = \{-1, 1\}$.

Exercice 3

1. Soit $\mathbb{A}$ un anneau commutatif unitaire. Montrer que l'une des deux propriétés suivantes est nécessairement vérifiée :
   (i) $\mathbb{A}$ possède un sous–anneau isomorphe à $\mathbb{Z}$;
   (ii) il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n1_{\mathbb{A}} = 0$.
2. On suppose désormais que $\mathbb{A}$ vérifie (ii) pour un entier premier p.
   (a) Montrer que pour tout $0 < k < p$, $\mathbf{C}_p^k 1_{\mathbb{A}} = 0$.
   (b) Montrer que l'application suivante est un morphisme d'anneaux :
   $$F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$$
   $$x \mapsto x^p.$$
   Que dire de F lorsque $\mathbb{A} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

arnaud.girand@ens-rennes.fr

Exercice 4

Soit $\mathbb{A}$ un anneau commutatif unitaire. Deux idéaux I, J de $\mathbb{A}$ sont dits *étrangers* si $I + J = \mathbb{A}$.

1. À quelle condition (nécessaire et suffisante) deux idéaux de $\mathbb{Z}$ sont–ils étrangers ?
2. Montrer que deux idéaux maximaux distincts sont toujours étrangers.
3. Montrer que si I et J sont étrangers alors $I.J = I \cap J$.

arnaud.girand@ens-rennes.fr