Parlons monodromie

Arnaud Girand

IRMAR - ENS Rennes

28 juin 2014

Journées Michel Pierre, ENS Rennes

Cadre

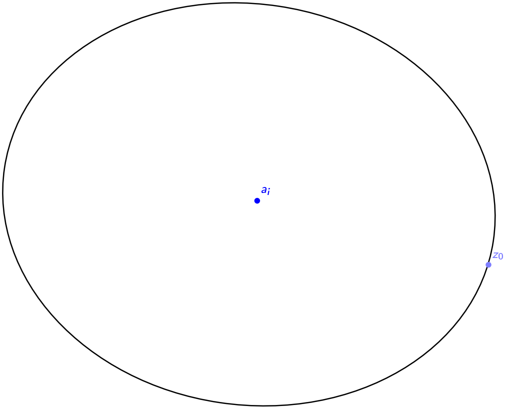
On considère un système différentiel défini sur $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$ de la forme suivante :

$$\frac{dY}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{z - a_i} \right) Y \,, \tag{1}$$

où :

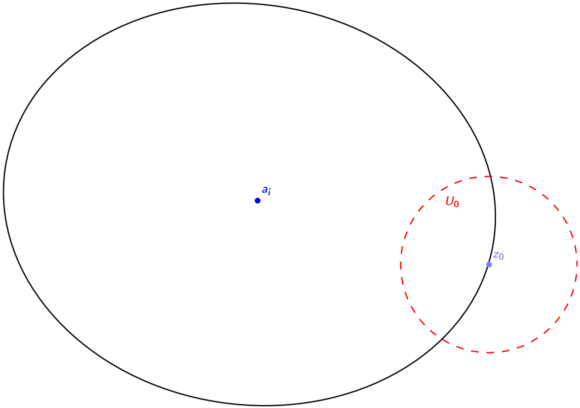
- les $A_i \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ sont constantes ;
- l'inconnue Y est à valeurs dans $\mathbb{C}^d$.

On fixe un lacet faisant γ le tour de a_i.

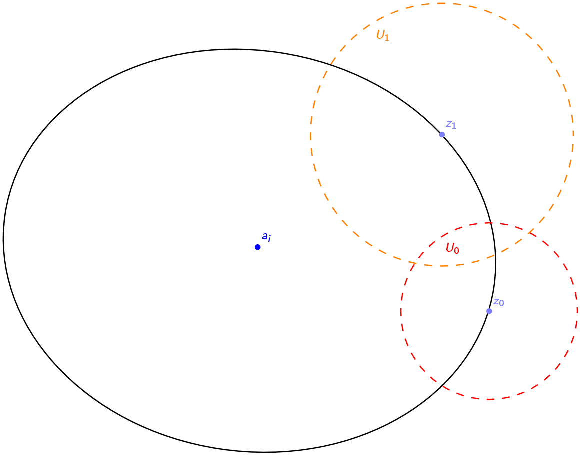


Monodromie : c'est quoi ?

On se donne une condition initiale en z_0, obtenant ainsi une solution Y_0 de (1) sur U_0 ...



…qui se recolle sur $U_0 \cap U_1$ à une unique solution de (1) sur U_1.

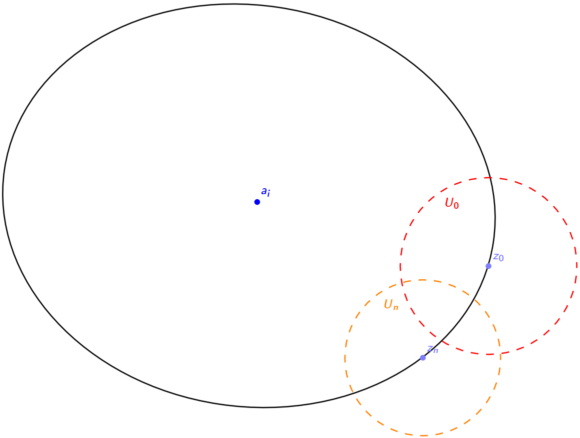


Monodromie : c'est quoi ?

On itère le procédé (l'image du lacet est compacte) ...

Monodromie : c'est quoi ?

À la fin, on obtient une solution Y_n de (1) sur U_n qui se recolle à une unique solution sur U_0.



Monodromie : c'est quoi ?

Question

A-t-on $Y_n = Y_0$?

Réponse : en général, non. Par exemple, regarder :

$$\frac{dy}{dz} = \alpha y \,, \quad \alpha \notin \mathbb{Z} \,.$$

Un tour autour du cercle unité multiplie notre solution par $e^{2i\pi\alpha}$.

Monodromie : c'est quoi ?

Question

A-t-on $Y_n = Y_0$?

Réponse : en général, non. Par exemple, regarder :

$$\frac{dy}{dz} = \alpha y \,, \quad \alpha \notin \mathbb{Z} \,.$$

Un tour autour du cercle unité multiplie notre solution par $e^{2i\pi\alpha}$.

Question

A-t-on $Y_n = Y_0$?

Réponse : en général, non. Par exemple, regarder :

$$\frac{dy}{dz} = \alpha y \,, \quad \alpha \notin \mathbb{Z} \,.$$

Un tour autour du cercle unité multiplie notre solution par $e^{2i\pi\alpha}$.

Quelques faits

On passe de Y_n à Y_0 via une matrice $M_\gamma \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ (penser "changement de condition initiale"). On a alors les résultats suivants :

- $M_\gamma \in GL_d(\mathbb{C})$;
- M_γ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ ;
- mieux, l'application suivante réalise un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned}\mathrm{Mon} : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}, z_0) &\to GL_d(\mathbb{C}) \\ [\gamma] &\mapsto M_\gamma \quad .\end{aligned}$$

Quelques faits

On passe de Y_n à Y_0 via une matrice $M_\gamma \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ (penser "changement de condition initiale"). On a alors les résultats suivants :

- $M_\gamma \in GL_d(\mathbb{C})$;
- M_γ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ ;
- mieux, l'application suivante réalise un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mon} : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}, z_0) &\to GL_d(\mathbb{C}) \\ [\gamma] &\mapsto M_\gamma \quad . \end{aligned}$$

Quelques faits

On passe de Y_n à Y_0 via une matrice $M_\gamma \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ (penser "changement de condition initiale"). On a alors les résultats suivants :

- $M_\gamma \in GL_d(\mathbb{C})$;
- M_γ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ ;
- mieux, l'application suivante réalise un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mon} : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}, z_0) &\to GL_d(\mathbb{C}) \\ [\gamma] &\mapsto M_\gamma \end{aligned} \quad .$$

Quelques faits

On passe de Y_n à Y_0 via une matrice $M_\gamma \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ (penser "changement de condition initiale"). On a alors les résultats suivants :

- $M_\gamma \in GL_d(\mathbb{C})$;
- M_γ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ ;
- mieux, l'application suivante réalise un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mon} : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}, z_0) &\to GL_d(\mathbb{C}) \\ [\gamma] &\mapsto M_\gamma \end{aligned} \quad .$$

Un exemple de déformation isomonodromique

On se donne $A_0(t), A_1(t), A_2(t) \in SL_2(\mathbb{C})$ pour $t \neq 0, 1$ et on s'intéresse au système :

$$\frac{dY}{dz} = \left(\frac{A_0(t)}{z} + \frac{A_1(t)}{z-1} + \frac{A_2(t)}{z-t} \right) Y \,. \tag{2}$$

Question

À quelle(s) condition(s) sur les $t \mapsto A_i(t)$ a–t–on une monodromie invariante du paramètre $t \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$?

Un exemple de déformation isomonodromique

On se donne $A_0(t), A_1(t), A_2(t) \in SL_2(\mathbb{C})$ pour $t \neq 0, 1$ et on s'intéresse au système :

$$\frac{dY}{dz} = \left(\frac{A_0(t)}{z} + \frac{A_1(t)}{z-1} + \frac{A_2(t)}{z-t} \right) Y \, . \tag{2}$$

Question

À quelle(s) condition(s) sur les $t \mapsto A_i(t)$ a–t–on une monodromie invariante du paramètre $t \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$?

Un exemple de déformation isomonodromique

Théorème [Schlesinger]

La monodromie est indépendante du paramètre t si et seulement si les fonctions $t \mapsto A_i(t)$ vérifient les équations suivantes :

$$\frac{dA_0}{dt} = \frac{[A_2, A_0]}{t} \; ;$$
$$\frac{dA_1}{dt} = \frac{[A_2, A_1]}{t-1} \; ;$$
$$\frac{dA_2}{dt} = -\frac{[A_2, A_0]}{t} - \frac{[A_2, A_1]}{t-1},$$

où $[M, N] := MN - NM$.

En particulier, la fonction $t \mapsto A_\infty(t) := A_0(t) + A_1(t) + A_2(t)$ est constante.

Un exemple de déformation isomonodromique

Théorème [Schlesinger]

La monodromie est indépendante du paramètre t si et seulement si les fonctions $t \mapsto A_i(t)$ vérifient les équations suivantes :

$$\frac{dA_0}{dt} = \frac{[A_2, A_0]}{t} ;$$
$$\frac{dA_1}{dt} = \frac{[A_2, A_1]}{t-1} ;$$
$$\frac{dA_2}{dt} = -\frac{[A_2, A_0]}{t} - \frac{[A_2, A_1]}{t-1},$$

où $[M, N] := MN - NM$.

En particulier, la fonction $t \mapsto A_\infty(t) := A_0(t) + A_1(t) + A_2(t)$ est constante.

Pour simplifier, supposons que la matrice A_∞ est diagonale. Alors, si on pose :

$$A(t) := \frac{A_0(t)}{z} + \frac{A_1(t)}{z-1} + \frac{A_2(t)}{z-t},$$

le coefficient $A_{2,1}(t)$ de cette matrice est de la forme :

$$\frac{c(t)(z-y(t))}{z(z-1)(z-t)}.$$

Un exemple de déformation isomonodromique

Théorème

La monodromie est indépendante du paramètre t si et seulement si y vérifie l'équation dite de Painlevé VI :

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} =& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y-t}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \\ & -\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{y-t}\right)\frac{dy}{dt} \\ & +\frac{y(y-1)(y-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha+\beta\frac{t}{y^2}+\gamma\frac{t-1}{(y-1)^2}+\delta\frac{t(t-1)}{(y-t)^2}\right),\end{aligned}$$

où α,β,γ et δ se calculent explicitement à partir des matrices $A_i(t)$.